CS-119(g) Information, Calcul, Communication (ICC-SV)

EPFL - Automne 2025 - Semaine 05 - 10.10.2025

Rappel de trigonométrie

Soient a, b, u, v des nombres réels. Alors on a les relations suivantes:

$$\cos(b) - \cos(a) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(b) - \sin(a) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

ou de manière équivalente:

$$2\sin(u)\sin(v) = \cos(u-v) - \cos(u+v) \quad \text{et} \quad 2\cos(u)\sin(v) = \sin(u+v) - \sin(u-v)$$

On rappelle également que $\cos(a) = \sin(a + \frac{\pi}{2})$, $\cos(a) = \sin(\frac{\pi}{2} - a)$, $\cos(-a) = \cos(a)$, $\sin(-a) = -\sin(a)$ et $\sin'(a) = \cos(a)$.

1 Filtrer avant d'échantillonner

Pour rappel (cf. série 8, ex.3): lorsqu'on joue une note de musique sur instrument (p.ex. la note “La” à 440 Hz), on joue tout sauf une sinusoïde pure! Le son produit est une somme de sinusoïdes:

$$X(t) = \sum_{n\geq 1} a_n \sin(2\pi n f_0 t), \quad t \in \mathbb{R}$$

où f_0 est appelée la *fréquence fondamentale* (440 Hz dans le cas du “La”), et nf_0 sont les fréquences des *harmoniques* qui composent la note[1]. Remarquez que les fréquences nf_0 des harmoniques sont toujours des *multiples* de la fréquence fondamentale f_0, tandis que les amplitudes $a_n > 0$ de ces mêmes harmoniques (généralement décroissantes avec n) varient d'un instrument à l'autre; elles déterminent ce qu'on appelle le *timbre* de l'instrument (i.e., l'allure du signal X).

a) Quelle est la bande passante du signal X?

Pour enregistrer cette note de musique, on échantillonne le signal X à une certaine fréquence f_e. Si toutefois on veut éviter l'effet stroboscopique lors de la reconstruction du signal, il est nécessaire de filtrer le signal avant de l'échantillonner.

b) Pour chacune des fréquences fondamentales f_0 et fréquences d'échantillonnage f_e ci-dessous, déterminer quelle(s) fréquence(s) de coupure f_c il est possible d'utiliser afin de préserver un nombre maximum d'harmoniques du signal tout en évitant l'effet strobosopique; déterminer également le nombre d'harmoniques préservées dans chaque cas.

1. $f_0 = 440$ Hz (“La”) et $f_e = 44.1$ kHz
2. $f_0 = 495$ Hz (“Si”) et $f_e = 44.1$ kHz
3. $f_0 = 330$ Hz (“Mi”) et $f_e = 8'820$ Hz

c) Beaucoup de systèmes de téléphonie mobile filtrent les signaux à 3.4 kHz (ce qui permet de transmettre à peu près correctement la voix humaine, tout en réduisant le nombre de données à transmettre, mais certainement pas la musique!): combien de bits au minimum sont nécessaires pour enregistrer correctement une conversation de 5 minutes avec un tel système (avec une représentation des nombres réels en virgule flottante sur 64 bits)?

Note: La téléphonie *large-bande* (avec une bande passante de 7 kHz, ou même de 22 kHz) est progressivement en train de remplacer ce “vieux” système.

[1] Pour les musicien.ne.s: si $f_0 = 440$Hz, alors $2f_0 = 880$ Hz est le “La” une octave au-dessus, $3f_0 = 1320$ Hz est le “Mi” encore une quinte au-dessus de cette octave, etc.

2 Accordage de guitare et phénomène dit de "battement"

Pour accorder une guitare, on joue en même temps sur deux cordes voisines deux notes qui sont censées être identiques en théorie. Si la guitare est mal accordée, on entend une vibration caractéristique (un "battement"), qui disparaît lorsque la guitare est bien accordée. Dans cet exercice, on se propose de comprendre ce phénomène du point de vue mathématique. Pour simplifier, on fait l'approximation que les notes qui sortent d'une guitare sont des sinusoïdes pures. L'onde émise par la première corde est donc $X_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$, tandis que celle émise par la deuxième est $X_2(t) = \sin(2\pi f_2 t)$, avec f_1 et f_2 proches l'une de l'autre[2]. Quelle est la forme de l'onde résultante $X_1(t) + X_2(t)$

a) lorsque f_1 et f_2 sont proches, mais pas égales?

b) lorsque $f_1 = f_2$?

Note: Vous pouvez vous aider de `https://www.wolframalpha.com/` pour répondre à cette question!

3 Formule d'interpolation

a) Montrer que pour toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$F(0) = 1 \quad \text{et} \quad F(k) = 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}^* \qquad \text{(k entier non nul)}$$

le signal $(Y(t),\, t \in \mathbb{R})$ donné par la formule

$$Y(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e)\, F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

vérifie l'égalité $Y(nT_e) = X(nT_e)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

b) Vérifier que si

$$F(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

alors le signal $(Y(t),\, t \in \mathbb{R})$ est la ligne brisée qui passe par les points échantillonnés $(X(nT_e),\, n \in \mathbb{Z})$ du signal $(X(t),\, t \in \mathbb{R})$.

Indication: Regarder d'abord ce que vaut le signal $Y(t)$ pour t entre 0 et T_e.

c) On utilise maintenant la formule d'interpolation vue au cours pour reconstruire le signal X:

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e)\, \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Dans le cas particulier où $X(t) = \cos(314\, t)$ et $T_e = 0.01$ seconde, que vaut $X_I(t)$?

d) Supposons maintenant que pour reconstruire un signal quelconque X de bande passante $f_{\max}$, on utilise la formule d'interpolation modifée:

$$\widetilde{X}_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(2mT_e)\, \text{sinc}\left(\frac{t - 2mT_e}{2T_e}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

(A) Quelle que soit la bande passante $f_{\max}$ du signal X, il est vrai que $\widetilde{X}_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(B) On est sûr que $\widetilde{X}_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si $f_e > 4f_{\max}$.

(C) On est sûr que $\widetilde{X}_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si $f_e > f_{\max}$.

(D) Il n'est jamais vrai que $\widetilde{X}_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, sauf si le signal X est identiquement nul.

[2] En pratique, il se peut bien sûr qu'il y ait un déphasage entre les deux ondes, et aussi que les amplitudes ne soient pas rigoureusement les mêmes, mais là aussi, on simplifie.