CS-119(g) Information, Calcul, Communication (ICC-SV)

EPFL - Automne 2025 - Semaine 04 - 03.10.2025

# Rappel de trigonométrie

Soient $a, b, u, v$ des nombres réels. Alors on a les relations suivantes:

$$\cos(b) - \cos(a) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(b) - \sin(a) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

ou de manière équivalente:

$$2\sin(u)\sin(v) = \cos(u-v) - \cos(u+v) \quad \text{et} \quad 2\cos(u)\sin(v) = \sin(u+v) - \sin(u-v)$$

On rappelle également que $\cos(a) = \sin(a + \frac{\pi}{2})$, $\cos(a) = \sin(\frac{\pi}{2} - a)$, $\cos(-a) = \cos(a)$, $\sin(-a) = -\sin(a)$ et $\sin'(a) = \cos(a)$.

# 1 Bande passante et fréquence d'échantillonnage

**a)** Soit $X(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(2\pi f_i t)$ un signal de bande passante $B = \max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.
Quelle est la bande passante des signaux suivants?

1. $2X(t)$
2. $X(t-1)$
3. $X(3t)$
4. $X(t) + \sin(2\pi f t)$, avec $f \neq f_1, f_2, \ldots, f_n$
5. $X'(t)$ [i.e., la dérivée de la fonction $X(t)$]

De manière correspondante, à quelle fréquence $f_e$ recommanderiez-vous d'échantillonner chacun de ces signaux?

**b)** Soient maintenant $X(t)$ et $Y(t)$ deux signaux de la forme ci-dessus, avec bandes passantes $B_X$ et $B_Y$, respectivement. *Que pouvez-vous dire* sur la bande passante des signaux suivants?

1. $X(t) + Y(t)$
2. $X(t) \cdot Y(t)$

De manière correspondante, à quelle fréquence $f_e$ recommanderiez-vous d'échantillonner chacun de ces signaux?

# 2 Interlude musical

Durant une heure, on enregistre un concert de musique à l'aide d'un micro qui échantillonne le son à une fréquence de 44 kHz, et chaque échantillon est quantifié sur 32 bits. Quelle est la taille du fichier audio résultant (si on ignore ici toute autre forme de compression)?

# 3 Signaux périodiques et apériodiques

Un signal $X(t)$ est dit *périodique de période* $T > 0$ si $T$ est la plus petite valeur possible pour laquelle $X(t) = X(t+T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (exemple: une sinusoïde pure de fréquence $f = 1/T$ est périodique de période $T$). Remarquer qu'on a alors également $X(t + kT) = X(t)$ pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{R}$.

**a)** Soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux périodiques de même période $T$. Est-ce que le signal $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique? Si oui, avec quelle période?

**b)** Soient encore $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux périodiques, mais cette fois avec deux périodes différentes $T_1$ et $T_2$, respectivement. Si $T_1$ et $T_2$ sont des nombres entiers, est-ce que le signal $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique? Si oui, avec quelle période?

**c)** Un cas particulier: une note produite par un instrument de musique est composée d'une sinusoïde avec une fréquence fondamentale $f_0$ et d'autres sinusoïdes, appelées les *harmoniques*, dont les fréquences sont des multiples de $f_0$. La note est donc un signal de la forme:

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

où le coefficient $a_n > 0$ est l'amplitude de la $n^e$ harmonique (ce sont ces coefficients qui déterminent le *timbre* de l'instrument). Est-ce que ce signal est périodique? Si oui, avec quelle période?

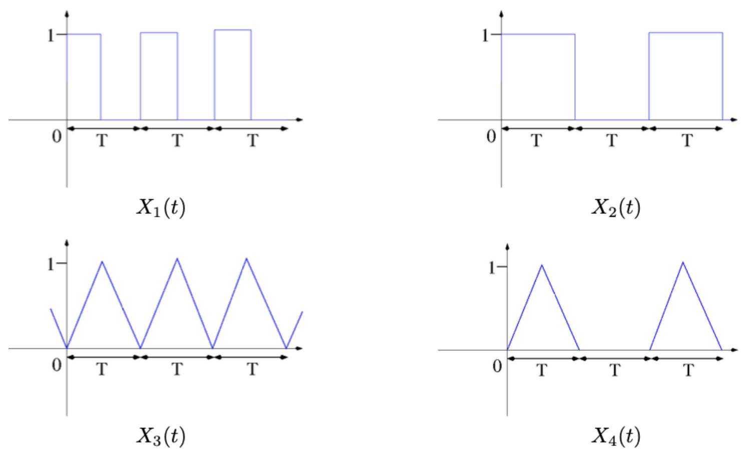
**d)** De manière plus générale, est-il toujours vrai que la somme $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique? (une justification formelle ne vous est pas demandée ici).

*Indication:* Pour avoir une meilleure idée de ce qui peut se passer, on peut chercher la réponse de manière numérique en représentant différents signaux sur `www.wolframalpha.com`. Essayez par exemple de rentrer ces deux formules sur le site:

"sin(2 pi t) + cos(4 pi t)" et "sin(2 pi t) + cos(4 t)"

## 4 Filtre à moyenne mobile

**a)** Comment les signaux suivants sont-ils transformés après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période $T_c = T$?




Pas besoin ici de formules mathématiques pour répondre: des dessins suffiront!

**b)** Qu'arrive-t-il à un signal périodique de période $T$ (voir exercice 3) après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de même période $T_c = T$?

**c)** Soit $X(t) = \sin(2\pi f\, t)$, une sinusoïde pure de fréquence $f$. Montrer qu'après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de période $T_c$, l'amplitude du signal sortant $\widehat{X}(t)$ satisfait l'inégalité

$$|\widehat{X}(t)| \leq |\text{sinc}(f\, T_c)| \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

où on rappelle que $\text{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ par définition.